حل نموذجي لمسـائل اختبار التفاضل الأول Quiz 1

الاختبار الأول

(1) أوجد مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}}$

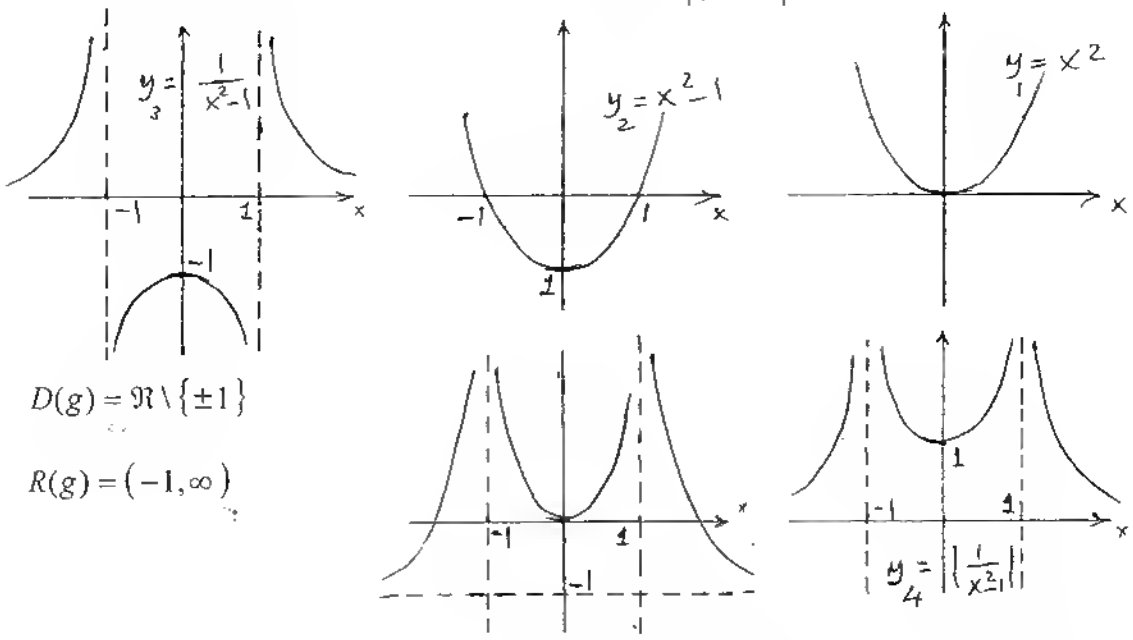
ضع $f(x)=\dfrac{f_1(x)-f_2(x)}{f_3(x)-f_4(x)}$

$D(f_1)=\Re$, $D(f_2)=[-4.4]$, $D(f_3)=(-\infty,7]$. $D(f_4)=[-3,\infty)$

$\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{7-x}\neq\sqrt{x+3} \quad\Rightarrow\quad 2x\neq 4 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2$

$\therefore \quad D(f)=D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3)\cap D(f_4)\setminus\{2\}=[-3.4]\setminus\{2\}$

(2) ارسم منحنى الدالة $g(x)=\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|-1$ موضحا خطوات الحل. ثم اذكر مجالها ومداها.



$D(g)=\Re\setminus\{\pm 1\}$

$R(g)=(-1,\infty)$

(3) أوجد $f\circ g$ ، $g\circ f$ مع ذكر المجال إن وجد إذا كان $g(x)=1/x$ ، $f(x)=\sqrt{x-1}$

$D(f)=[1,\infty)$ $\qquad$ $D(g)=\Re\setminus\{0\}$

$R(f)=[0,\infty)$ $\qquad$ $R(g)=\Re\setminus\{0\}$

$f\circ g$:

$D(f)\cap R(g)=[1,\infty)\neq\phi$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1/x)=\sqrt{(1/x)-1}$.

$(1/x)-1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (1/x)\geq 1 \quad\Rightarrow\quad 0<x\leq 1$

$D(f\circ g)=(0.1]$

$g\circ f$:

$D(g)\cap R(f)=(0,\infty)\neq\phi$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-1})=1/\sqrt{x-1}$

$D(g\circ f)=(1.\infty)$

الاختبار الثاني

(1) أوجد مجال الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{1-x}}{x+2-\sqrt{4-x^2}}$

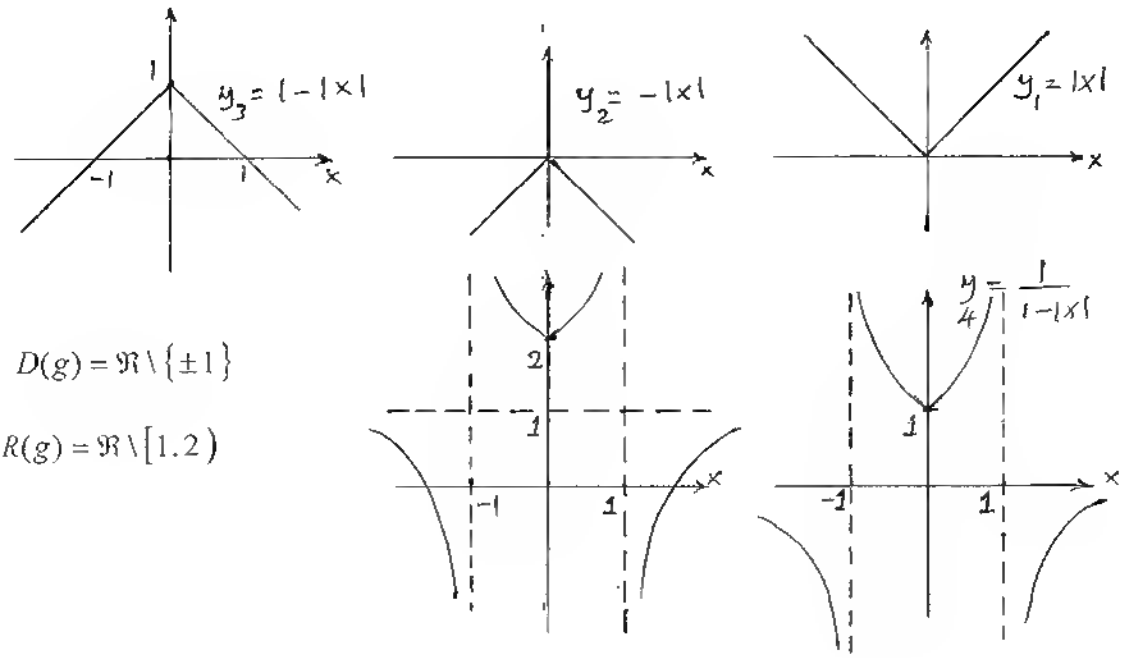
ضع $f(x)=\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{f_3(x)-f_4(x)}$

$D(f_1)=[-5,\infty)$. $D(f_2)=(-\infty,1]$. $D(f_3)=\Re$. $D(f_4)=[-2,2]$

$x+2-\sqrt{4-x^2}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x+2\neq\sqrt{4-x^2} \quad\Rightarrow\quad 2x^2+4x\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq -2 \text{ or } 0$

$\therefore \quad D(f)=D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3)\cap D(f_4)\setminus\{-2,0\}=(-2.1]\setminus\{0\}$

(2) ارسم منحنى الدالة $g(x)=1+\dfrac{1}{1-|x|}$ موضحا خطوات الحل. ثم اذكر مجالها ومداها.



$D(g)=\Re\setminus\{\pm 1\}$

$R(g)=\Re\setminus[1.2)$

(3) أوجد $f\circ g$ ، $g\circ f$ مع ذكر المجال ان وجد إذا كان $g(x)=1/x^2$ ، $f(x)=\sqrt{1-x}$

$D(f)=(-\infty,1]$ $\quad D(g)=\Re\setminus\{0\}$

$R(f)=[0,\infty)$ $\quad R(g)=(0,\infty)$

$f\circ g$:

$D(f)\cap R(g)=(0.1]\neq\phi$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(1/x^2\right)=\sqrt{1-(1/x^2)}$.

$1-(1/x^2)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (1/x^2)\leq 1 \quad\Rightarrow\quad x^2\geq 1 \quad\Rightarrow\quad x\leq -1 \text{ or } x\geq 1$

$D(f\circ g)=\Re\setminus(-1.1)$

$g\circ f$:

$D(g)\cap R(f)=(0,\infty)\neq\phi$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{1-x}\right)=1/\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1/(1-x)$.

$D(g\circ f)=(-\infty,1)$

الجبر:

1) أثبت أن $A^T(B+C)=A^TB+A^TC$ إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ (درجتان)

2) باستخدام طريقة جاوس جوردان للحذف أوجد حل المعادلة : $AX=BX+C$ ، حيث

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\1 & -2 & 1\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}6\\14\\-2\end{bmatrix}$$

(4 درجات)

1] $LHS = A^T(B+C)$

$= A^T\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & 2\end{bmatrix}$

$= [-3 \quad 8]$

$RHS = A^TB + A^TC$

$= \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}$

$+ \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$

$= [-1 \quad 7] + [-2 \quad 1]$

$= [-3 \quad 8]$

$\therefore LHS = RHS$

2] $AX = BX + C$

$(A-B)X = C$

$A-B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & -3 & 2\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

①	2	3	6
2	-3	2	14
3	1	-1	-2
1	2	3	6
0	-7	-4	2
0	-5	-10	-20
1	2	3	6
0	-7	-4	2
0	①	2	4
1	0	-1	-2
0	0	10	30
0	1	2	4
1	0	-1	-2
0	0	①	3
0	1	2	4
1	0	0	1
0	0	1	3
0	1	0	-2
1	0	0	1
0	1	0	-2
0	0	1	3

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$

الجبر:

1) أثبت أن $(AB)^t = B^t A^t$ إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (درجتان)

2) باستخدام طريقة جاوس جوردان للحذف أوجد حل المعادلة : $AX+2C=D$ ، حيث:

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2\\ -5\\ 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}$ (4 درجات)

1

$LHS = (AB)^T$

$= \left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\right)^T$

$= \begin{bmatrix}8 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}8 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$RHS = B^T A^T$

$= \begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}8 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore LHS = RHS$

2

$AX + 2C = D$

$AX = D - 2C = \begin{bmatrix}2\\ 4\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4\\ -10\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 14\\ -2\end{bmatrix}$

①	2	3	6
2	-3	2	14
3	1	-1	-2
1	2	3	6
0	-7	-4	2
0	-5	-10	-70
1	2	3	6
0	-7	-4	2
0	①	2	4
1	0	-1	-2
0	0	10	30
0	1	2	4
1	0	-1	-2
0	0	①	3
0	1	2	4
1	0	0	1
0	0	1	3
0	1	0	-2
1	0	0	1
0	1	0	-2
0	0	1	3

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$